

Câu 1 (a) Sử dụng phép đổi biến $x = a - y$ với a thích hợp để tính tích phân sau

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$$

(b) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(1) = -P(0)$.

Chứng minh rằng
$$\int_0^1 P''(x)x(x-1)dx = 2 \int_0^1 P(x)dx$$

Câu 2 Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ với $n = 2, 3, 4, \dots$

Rút gọn tổng $S = u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Từ đó chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \ln \frac{1}{2}$.

Câu 3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} - \frac{3}{z+x} = 1 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{y+z} + \frac{3}{z+x} = 1 \\ -\frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{3}{z+x} = 1 \end{cases}$$

Câu 4 Tìm hàm số $f(x)$ có giá trị lớn hơn 1 và xác định với mọi $x > 0$, biết rằng

$$\left(\frac{f(x)+1}{f(x)-1} \right)^2 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Câu 5 (a) Trong mặt phẳng, một tập hợp gồm 8 đường thẳng song song cắt một tập hợp gồm n đường thẳng song song theo phương khác, tạo thành 420 hình bình hành (nhiều hình có thể phủ hình kia). Hãy tính n .

(b) Có 4 người đàn ông A, B, C, D cần đi qua một chiếc cầu rất yếu trong đêm tối. Không may là chỉ có một cây đuốc, không có đuốc thì không thể qua cầu được. Thời gian qua cầu của A, B, C, D lần lượt là: 1 phút, 2 phút, 7 phút và 10 phút. Mỗi lượt đi chỉ được nhiều nhất 2 người và theo thời gian của người đi nhiều hơn. Hỏi thời gian ngắn nhất để 4 người đàn ông qua cầu là bao lâu?



Ảnh minh họa.

Câu 1 (a) Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{\frac{x}{e^2 + e^x}}$.

(b) Cho hàm số $f(x)$ khả vi và $f(0) = 0$. Sử dụng định nghĩa đạo hàm, chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2x) + f(3x) + \dots + f(nx)}{x} = \frac{n(n+1)}{2} f'(0)$

Câu 2 Cho dãy số x_n thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 = 2017 \\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = (n + 2018)x_{n+1} \end{cases} \quad \text{Tìm giới hạn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Câu 3 Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn

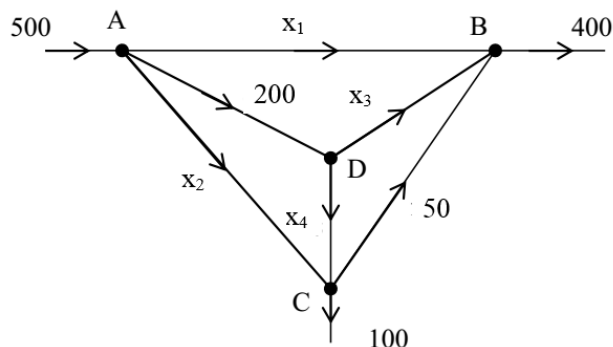
$$\begin{cases} x = by + cz \\ y = ax + cz \\ z = ax + by \end{cases}, \quad \text{với } x + y + z \neq 0 \text{ và } a, b, c \neq -1.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$.

Câu 4 Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 4} + x + 2}$. Chứng tỏ rằng $f(x)$ là hàm lẻ.

Câu 5 (a) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(3x) - P(x) = 16x^2 - 10x$. Tìm các hệ số a, b, c để hàm số $f(x) = P(x) - (ax^2 + bx + c)$ thỏa mãn $f(3x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(b) Cho mạng lưới giao thông một chiều như hình vẽ, với x_1, x_2, x_3, x_4 là lưu lượng xe đi trên các con đường. Số xe đi vào nút A là 500 và đi ra nút B, C lần lượt là 400, 100. Tại mỗi nút của mạng lưới, luôn có tổng lưu lượng xe đi vào bằng xe đi ra. Ngoài ra lưu lượng trên đường AB gấp 4 lần lưu lượng trên đường CD. Tìm lưu lượng xe đi trên mỗi con đường.



Thời gian làm bài : 150 phút.

(b) Cho một mảng hình vuông gồm 4×4 ô vuông. Tại mỗi ô, người ta điền ngẫu nhiên một trong ba số: -1 , 0 hoặc 1 . Tính tổng tất cả các ô theo hàng, theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Câu 1. a) Ký hiệu $\mathbb{R}_*^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Hãy xác định hàm nhận giá trị dương $f(x)$ với tập xác định $\mathbb{R}_*^+$ (tức là $f(x) \in \mathbb{R}_*^+$ với mọi $x \in \mathbb{R}_*^+$) biết rằng:

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} = \left(\frac{\sqrt{f(x)+1}+1}{\sqrt{f(x)+1}-1} \right)^2.$$

b) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) = 12x^2 f(x^3) - \frac{x^3}{x+1}$.

Hãy tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Câu 2. Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng : $x_{n+1} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3} x_n$ với mọi $n \geq 1$.

b) Chứng minh rằng: $x_n \leq 4(n-1)$ với mọi $n \geq 2$.

Câu 3. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases} xy + x + y = 15 \\ yz + y + z = 3 \\ zx + z + x = 24 \end{cases}$. Tính $S = x^2 + y^2 + z^2$.

Câu 4. Biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $x-2$ dư 5 và chia cho $x-3$ dư 7. Tìm phần dư của đa thức $P(x)$ khi chia cho $(x-2)(x-3)$.

Câu 5. a) Một nhóm gia đình đi dã ngoại bằng tàu. Mỗi vé tàu sử dụng được cho 5 người lớn. Một trẻ em sử dụng vé bằng $\frac{1}{2}$ vé người lớn. Mỗi người lớn được

mang theo một chú chó miễn phí và từ chú chó thứ 2 thì tính bằng $\frac{1}{3}$ vé người lớn.

Biết rằng họ đã sử dụng hết 4 vé và số chó gấp 3 lần số người và trong nhóm luôn có người lớn. Hỏi tối thiểu sẽ có bao nhiêu con chó được lên tàu cùng nhóm gia đình đó?

b) Nhân dịp niệm 60 năm thành lập Trường Đại học Thủy Lợi, Hội sinh viên tổ chức cắm trại và phân thi được mong chờ nhất là gói và rán bánh chưng. Mỗi đội phải rán chín 12 miếng bánh chưng, miếng bánh chưng được coi là chín khi rán chín 2 mặt to nhất, (trung bình 5 phút rán chín 1 mặt). Biết rằng các đội chỉ được sử dụng chảo “phi 28” do ban tổ chức cấp và chảo loại này chỉ xếp được tối đa 8 miếng bánh chưng cùng một lúc. Coi như trình độ rán bánh của các đội như nhau và chiến thắng thuộc về đội rán xong nhanh nhất. Hỏi đội chiến thắng sẽ mất bao nhiêu phút để hoàn thành việc rán bánh?

Câu 1. a) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sin^5 x + \cos^5 x, \quad x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Câu 2. Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $u_n = \frac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

a) Chứng minh rằng: $u_n = f(n-1) - f(n+1)$, $\forall n \geq 1$ với $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$.

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Câu 3. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn

$$\frac{x}{2y + 2z + 2022} = \frac{y}{2x + 2z + 2022} = \frac{z}{2x + 2y - 4044} = x + y + z.$$

a) Chứng minh rằng nếu x, y, z khác 0 thì $x + y + z = \frac{1}{4}$.

b) Tìm ba số x, y, z .

Câu 4. Cho f là hàm số liên tục thỏa mãn: $f(0) = 0$ và

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng: $\left| (f(x))^2 - f(x) \right| \leq |\sin x| \cdot \|\sin x\| + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$

b) Chứng tỏ rằng: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((f(x))^2 - f(x) \right) dx \leq \frac{\pi}{4} + 1.$

Câu 5. a) Một ô bàn cờ hình vuông kích thước 8×8 bị mất hai ô ở hai góc đối diện của bàn cờ. Liệu có thể dùng các domino kích thước 1×2 để phủ kín bàn cờ đó được hay không.

b) Trong bảng số sau

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

với $a_{ij} \in \{-1; 0; 1\}; i \in \{1, 2, 3, 4\}; j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Tính tổng các phần tử trong mỗi hàng, tính tổng các phần tử trong mỗi cột, và tính tổng các phần tử theo mỗi đường chéo (có hai đường chéo gồm các phần tử màu đỏ hoặc màu xanh). Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 4} + x + 2}$.

a) Chứng minh rằng: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}$

b) Tính tích phân xác định: $I = \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 4} + x + 2} dx$.

Câu 2. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, với $n = 2, 3, \dots$

a) Chứng minh rằng: $u_n = \ln \frac{n-1}{n} - \ln \frac{n}{n+1}$, với $n = 2, 3, \dots$

b) Đặt $S_n = u_2 + \dots + u_n$. Chứng minh rằng: $S_n > \ln \frac{1}{2}$, với $n = 2, 3, \dots$

Câu 3. Cho $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} = 2022$.

a) Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} = \frac{-xy}{x+y} + \frac{-yz}{y+z} + \frac{-zx}{z+x} + (x+y+z)$.

b) Đặt $S = \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x} + 1$. Chứng minh rằng: $S = 2023$.

Câu 4. Cho đa thức bậc bốn $P(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$P(-1) = 0 \text{ và } P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x-1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng: $P(x)$ nhận $x = -2; x = -1; x = 0$ là các nghiệm.

b) Tìm đa thức $P(x)$.

Câu 5.

a) Một chàng trai hỏi ngày sinh nhật của một cô gái mới quen. Cô gái trả lời: " Hai ngày trước em 17 tuổi, nhưng năm tới em sẽ 20 tuổi". Bạn hãy giúp chàng trai đoán ngày sinh nhật của cô gái.

b) *Bài toán cắt bánh của Martin Gardner.*

Với một nhát cắt, bạn có thể chia một chiếc bánh thành hai phần. Cắt thêm một nhát nữa, chiếc bánh sẽ được chia thành 4 phần. Đến nhát cắt thứ ba, bạn có thể chia chiếc bánh thành tối đa 7 phần. Vậy với 6 nhát cắt, bạn có thể chia chiếc bánh thành tối đa bao nhiêu phần?

